

Резюмета на трудовете

на доц. дн Милена Рачева

за участие в конкурс за заемане на академичната длъжност „професор“
в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.5 Математика,
научна специалност „Изчислителна математика“
обявен в ДВ бр. 48, 13 юни 2025г.

Смесен вариационен подход за линеаризиране и/или понижаване на реда на квадратични задачи на Щурм-Лиувил и задачи от висок ред (статии [8.1-8.4] и [8.14])

Тези пет статии са посветени на числов анализ и компютърна реализация на модели, които се описват чрез обикновени диференциални уравнения от четен ред. В [8.1] и [8.2] е предложен и изследван алгоритъм за линеаризация на квадратична задача на Щурм-Лиувил от втори и четвърти ред. В световната литература обикновено се третира нелинейната алгебрична система (квадратичното матрично уравнение). Тук е предложена процедура за получаване на система от диференциални уравнения, в която спектралният параметър λ да участва само линейно. Доказана е теорема за оценка на грешката за собствените стойности при тази квадратична задача на Щурм-Лиувил [8.2]. За задача от четвърти ред са представени различни варианти за линеаризация и линеаризация, съчетана с понижаване на реда [8.3].

Основно постижение на [8.4] и [8.14] е, че при моделни спектрални задачи от шести ред предложеният алгоритъм позволява използването дори на линейни елементи в смесения метод на крайните елементи. Доказана е теорема за $\frac{1}{2}$ -порядък на грешката при собствени стойности за задачата от шести ред, апроксимирана с линейни крайни елементи.

В статиите са разгледани и матрични представяния и изчислителни аспекти за споменатите по-горе задачи.

Статиите [8.1-8.4] и [8.14] имат общ подход за постигане на две важни цели от изчислителната математика:

- Да се линеаризират квадратични задачи на Щурм-Лиувил;
- Да се редуцира степента на апроксимиращите полиномиални пространства, чрез които се пресмята спектърът на диференциални оператори от четен ред.

Числово решаване на задача за собствени стойности

от втори ред в безкрайна област

(статия [8.5])

Полезни за практиката и интересни за изследване са задачи, определени в безкрайни области (напр. разпределение на температурно поле). Тогава подходът е произволна и ограничена област да се разделя с крайни елементи (FEs), а останалата част от областта се покрива с безкрайни елементи (ILEs – infinite large elements). Разглежда се задача, която илюстрира основното постижение а именно: да се получи конформно свързване между двата вида елементи, което да удовлетворява условието за ограниченост на решението.

Получена е конкретна система от базисни функции, които осигуряват конформен FE/ILE-метод. Този резултат провокира други подобни свързвания за решаване на моделни задачи в безкрайни области.

Прекъснат метод на Гальоркин за интегро-диференциално уравнение

с конволюционно ядро от тип Митаг-Лефлер

(статия [8.6])

Интегралните и диференциалните оператори от дробен ред са много подходящи за моделиране на ефектите на паметта на материали от различен вид, особено за моделиране на вискоеластични материали. Основните уравнения на динамичната вискоеластична задача са интегро-диференциални уравнения от хиперболичен тип.

В статия [8.6] е разгледан комплицираният случай на интегро-диференциално уравнение, моделиращо динамична вискоеластичност от дробен ред, при който интегралното конволюционно ядро е слабо сингулярно и е приложен прекъснат метод на Гальоркин (discontinuous Galerkin method – DGM). В литературата има редица изследвания и множество публикации в случай на: несингулярно ядро; непрекъснат метод на Гальоркин (continuous Galerkin method – CGM) от първи ред както във времевите, така и в пространствените променливи; динамична моделна задача от линейна вискоеластичност (с експоненциално ядро) с приложен DGM и CGM съответно за времевата и пространствените променливи и др.

Статията е разширение на налични в литературата резултати върху квазистатични ($\rho \ddot{u} \approx 0$) линейни и дробни по ред вискоеластични модели.

Формулиран и използван за времева полудискретизация на задачата е DGM(0), базиран на по части константни относно времевата променлива полиноми. Доказани са оценки на

стабилността за дискретната задача. Те от своя страна се използват за доказване на априорни оценки на грешките от оптимален порядък за преместването u и скоростта $\dot{u}$.

Теорията е подкрепена с числов пример върху единичния квадрат, равномерно триангулиран, като за пространствените променливи е използван МКЕ с по части линейни полиноми. Направено е сравнение с точното решение. Примерът илюстрира, че DGM(0) възпроизвежда механичното поведение на моделната задача и потвърждава скоростта на сходимост $O(k)$ по отношение на времевата променлива (k е времевата стъпка).

Статия [8.6] е следствие от научните контакти и постдок-специализацията на кандидата в Кралство Швеция. Множеството цитирания, които е получила, потвърждават качеството и значимостта на резултатите в нея.

Апостериорна процедура върху неконформно решение за получаване на двустранна апроксимация на собствени стойности

(статии [8.7] и [8.20])

В числовия анализ особено ценни са т. нар. двустранни оценки (оценка отгоре и оценка отдолу) на собствените стойности. Добра база за получаването им са някои резултати в МКЕ. Например: предвид min-max характеристика на собствените стойности, при числова реализация на конформен МКЕ полученото приближение дава винаги оценка отгоре.

Статии [8.7] и [8.20] предлагат оригинален алгоритъм за получаване на двустранна оценка, без да бъде решавана повторно разглежданата спектрална задача. Освен това, предложената апостериорна процедура подобрява (понякога съществено!) точността на приближението. Доказани са теореми за двустранни оценки при спектрални задачи от втори и четвърти ред, както и са дискутирани изчислителни аспекти, свързани с прилагане на алгоритъма.

Пресмятания са извършени с първоначално използване на неконформни крайни елементи, даващо долна граница на собствените стойности – съответно елементи на Крузьо-Равиар за задача от втори ред [8.7] и елементи на Адини при задача от четвърти ред за пресмятане на непринудени колебания на плоча [8.20].

Неконформни крайни елементи

(статии [8.8] и [8.18])

Отказът от удовлетворяване на необходимата гладкост на приближаващото функционално (по части полиномиално) пространство в МКЕ дава някои предимства в приложението на метода. Измежду тях могат да се посочат: по-удобно и лесно апроксимиране на условието за нулева дивергенция на скоростта на флуида в уравнението на Стокс и Навие-Стокс; получаване на по-

удобни за пресмятане разредени матрици; използването на някои неконформни крайни елементи осигурява получаване на приближения отдолу на собствените стойности и др.

Посочените по-горе три статии имат принос в анализ и числова реализация на някои неконформни крайни елементи. Статия [8.8] разглежда четириъгълна версия на краен елемент на Морли, изчислителни особености при задачи от четвърти ред и възможни базиси при използването на този елемент. В [8.18] са разгледани подробно трите възможни вида базисни полиноми и връзката между тях за правоъгълник на Морли.

Използване на конформно решение в МКЕ за получаване на двустранна апроксимация на собствени стойности (статии [8.9], [8.11], [8.13], [8.19], [8.21], [8.25] и [8.26])

Известен факт е (min-max принцип), че конформният МКЕ апроксимира собствените стойности винаги отгоре. Посочените по-горе статии предлагат алгоритми, които на базата на получено крайноелементно решение дават двустранни оценки на собствените стойности. Тук е мястото дебело да се подчертае, че процедурата не изисква повторно решаване на спектралната задача с други методи/елементи, а се основава на конструиране на подходящ интерполант на вече получено крайноелементно приближено решение. Този оригинален подход е доказан за широк клас крайни елементи.

При получените резултати е характерно това, че апостериорната интерполационна процедура е провокирана от съответен неконформен краен елемент. Така при апостериорното пресмятане се използват част от възлите, които са вече използвани при решаване на задачата с конформен МКЕ. На практика при задачи от втори ред е удобно (и резултатно!) при дискретизация с триъгълници за се строят интерполанти, асоциирани с неконформен елемент на Крузьо-Равиар (C-R) и неговия разширен (extended) вариант (EC-R) [8.11], [8.13], [8.25], а при дискретизация с четириъгълни крайни елементи – асоциирани с ротирания неконформен EQ_1^{rot} [8.9], [8.26].

В предложените алгоритми авторът налага следната основна идея: по-удобно е прилагането на интегрални (вместо точкови) степени на свобода. Този важен аспект на изчислителните процедури е подробно дискутиран (виж напр. [8.25], [8.26]).

Методът е приложен както за задачи от втори, така и за задачи от четвърти ред.

В [8.11] е предложен 7-точков елемент с интегрални степени на свобода. Той е удобен както за получаване на двустранни оценки, така и за по-проста и достъпна форма на получаване на неконформен интерполант; също така е крайно подходящ при задачи върху застъпващи се области.

Теоретичните резултати и алгоритми са илюстрирани с числови пресмятания.

Апостериорно ускоряване на сходимостта чрез интерполиране

върху група крайни елементи

(публикация [8.10])

Обединението на група от крайни елементи в един макроелемент и последващо покриване на областта при вече налично крайноелементно решение е един ефективен подход за ускоряване на сходимостта, който може да се прилага както глобално, така и локално. Това позволява получаване на оценки от тип „свръхсходимост“ и дори от тип „ултрасходимост“ (повишаване на порядъка на мрежовия параметър с поне 2 единици). Образно казано, апостериорното покриване на решението с „кръпки“ (patch recovery technique) е трудоемък от теоретична гледна точка, но лесен за прилагане и сигурен метод за ускоряване на сходимостта.

Статия [8.10] е дълбоко и подробно изследване на гранични задачи от четвърти ред, съдържащи бихармоничния оператор Δ^2 . Получени и доказани са оценки от тип „ултрасходимост“ и са посочени алгоритми на апостериорните процедури за тяхното използване.

Решаване на алгебрични системи след прилагане

на изопараметричен МКЕ

(статии [8.16] и [8.17])

Изопараметричният метод има за цел по-точно и по-удобно да приближаваме решението на граничната задача чрез МКЕ, когато границата на областта е криволинейна или по части криволинейна. Двете статии са свързани и изследват качествени характеристики на линейни системи (с голяма размерност), получени след прилагане на изопараметричния МКЕ.

Доказана е сходимост на двунивов метод при йерархическа форма на съгъстяване. На тази база е получена оценка отгоре за константата γ на класическото усилено неравенство на Коши.

Тези резултати са приложени и илюстрирани за гранични задачи от втори и четвърти ред.

Приложения на тригонометрични полиноми и Фуриерови трансформации

(публикации [8.35 - 8.37])

Апроксимацията на периодични функции чрез хармоници от определен ред, както и получаване на съответните честотни разпределения, са основни обекти на изследване в теорията на сигналите и силнотоквата електротехника.

В [8.35] са получени интересни от практическа гледна точка конволюционни преобразувания на често използвани сигнали. Така чрез обратната трансформация на Фурие (FT) са получени гладки функции на оригинала. Показан е конволюционен метод на обратната FT, чрез която се получават стойностите на някои несобствени интеграли. Това са несобствени интеграли на цели положителни степени на *sinc*-функцията.

Статия [8.36] развива философия за дискретна апроксимация на Фуриерови хармоници на периодична функция, която на практика най-често е неизвестна. Дадени са интерполационни и метрични подходи при изчисляване. За целта са използвани ресурсите на Wolfram Cloud.

Приложението на тази философия за получаване на дискретни апроксимации е приложена и доразвита в [8.37] за правата и обратната задача при периодични функции. Тук освен неизменното присъствие на обобщената δ -функция на Дирак важна роля имат изчислените приближения на коефициентите.

В тези три статии авторът налага своето убеждение, че в инженерната практика, в която данните най-често са получени от измервания, ролята на изчислителната математика е основна. Ето защо се търсят и предлагат нови и разнообразни подходи за приближаване, съчетани с подходящ математически софтуер за тяхното реализиране.

Съвременни математически онлайн достъпни софтуерни средства

(статии [8.30] и [8.31])

Математическият софтуер играе все по-основна роля в научно-изследователската дейност, обучението и в развитието на технологиите. Представените две статии излагат прагматични сведения за използването, особености и дори икономически аспекти на съвременните софтуерни средства с математическа насоченост. Това по мнение на автора спомага за възприемане и създаване на отношение на студентите, докторантите и инженерите-изследователи към фундаменталната и изчислителната математика.

Важните за практиката моделни задачи водят до решаване на големи алгебрични системи. Те не биха могли да бъдат решавани без съответен софтуер. В [8.30] се сравняват софтуерни системи, които са на пазара и се дават полезни прагматични съвети. Особено място е отделено на Wolfram Cloud и (за спомагателни цели) Wolfram Alpha, което е отражение на позитивния опит и добрите резултати в преподавателската практика на автора.

В статия [8.31] дискутираният въпрос е разгледан от друг ъгъл: използване на математически софтуерни средства при преподаване, подготовка и изпитване на обучаемите от дистанция. Разгледани са разнообразни ситуации, които реално възникват в тези случаи.

Стилът на тези статии умишлено е леко провокативен. Една от целите е създаване на практика за дискутиране на важни въпроси, касаещи обучението по математически учебни дисциплини в техническите висши училища.

Математическо моделиране и пресмятания за инженерни задачи

(статии [8.22 - 8.24] и [8.27])

Математическите модели са основен инструмент за изследване на устойчивостта и за оразмеряване на различни динамични и електромеханични структури. Адекватността на модела и прецизността на компютърната му реализация са в основата на съвременния технически прогрес.

В статия [8.22] се изследва свързване с пневматичен цилиндър. Това би могло да бъде връзка между пневмо/хидро-клапан и задвижващо устройство. Поставената задача има за цел да моделира преходни процеси в динамиката на хидро- и пневмозадвижване. Моделното хиперболично ЧДУ се трансформира чрез преобразование на Лаплас. Получена е връзка между дължината на цилиндъра и времевото закъснение.

Нов числен метод за намиране на собствените стойности на реална 3×3 матрица е представен в [8.23]. Доказва се, че ако намерим единствения положителен корен на подходящо кубично уравнение, в което участват следата и детерминантата на матрицата, то трите собствени стойности се определят директно. В представения модел на пресмятане въпросният положителен корен е отделен в достатъчно малък интервал.

В статия [8.24] се разглежда математически модел на въртящ се материален цилиндър. Изучава се неговата стабилност в зависимост от аксиалната сила и въртящия момент, приложен към това тяло. Използва се смесен вариационен подход за приближаване на основната (първата) собствена двойка. Представени са два смесени вариационни модела със симетрични вариационни форми, които са удобни за числова реализация.

Статия [8.27] изучава математически модел, даващ огъвните колебания на твърд деформируем прът. На моделната гранична задача се налагат разнообразни гранични условия, повечето от които са практически обезпечени. Теоретично са изучени условията за нарушаване на симетричността, както и появата на собствената стойност в граничните условия.

Приложни изследвания на системи, съоръжения, агрегати и машини от електроенергетиката и електрообзавеждането с насоченост към енергийна и икономическа ефективност при условията на енергиен преход

(статии [8.12], [8.15], [8.28], [8.29], [8.32 - 8.34])

Статиите, обособени в тази група, са в областта на научните и приложни изследвания, свързани с енергийната и икономическата ефективност. Те са някои от резултатите на екипа, работещ по научни проекти под ръководството на кандидата по настоящата процедура в течение на последните няколко години. Тематиката е в съответствие с приоритетните задачи на провежданата държавна политика на РБългария и ЕС за повишаване на енергийната ефективност при крайно потребление на енергия и предоставяне на енергийни услуги, при

запазване на нормите на екологичност, качество на произвежданата продукция и качеството на живот на хората, както и с регионалните и университетски приоритети в научните изследвания.

В статия [8.12] се разглежда електрическата част на малка помпена станция. След компютърно моделиране е направена оценка на възникващите електрически загуби в задвижващите електродвигатели, както и на отделните компоненти на електрически загуби при различни условия. Направени са съответни заключения и препоръки. Предложена е модернизация на системата за водоснабдяване с питейна вода чрез използване на ново електрически задвижвано оборудване.

В [8.32] се разглежда фотоволтаична система с ниска мощност, реализирана чрез гъвкав модул, който е един от по-съвременните алтернативни източници на енергия. Избрано е техническо решение със специфични характеристики на отделните компоненти. Извършени са измервания с цифрова измервателна апаратура и са представени експериментални резултати.

Статии [8.15] и [8.33] са посветени на използването на ВЕИ (по-специално на използването на енергията на водата). Основната цел е анализът на работата на електрическата част както генерално погледнато, така и за конкретна водноелектрическа централа с ниска мощност. Извършена е математическа обработка на масиви от оперативните данни; получени са статистически резултати за изменението на определени променливи величини. В заключение са направени изводи относно експлоатационните показатели.

Статии [8.28], [8.29] и [8.34] са посветени на електромобилите. В [8.28] е направен общ преглед на производството, продажбите и използването на електрически автомобили в световен мащаб, а в [8.29] са разгледани особеностите в България към тогавашния момент. Основен принос тук е предложеният подход за проучване и оценяване в конкретната проблематика, който дава модел и съвкупност от параметри и аспекти при бъдещи изследвания, както и създава обществени нагласи към позитивна промяна в бъдещия транспорт и инфраструктура.

Публикация [8.34] е пленарен доклад от 34 стр., представен на годишен Енергиен форум, за който научният екип получи покана от НТС на енергетиците в България. Направен е общ преглед на състоянието на пазара за нови и употребявани напълно електрически леки автомобили; при използване на релативни източници на информация са представени в систематизиран вид подробни данни; открити са технически и икономически характеристики, съображения и препоръки. Публикацията е интересна и полезна за всички, свързани с и интересувани се от тематиката за електрическата мобилност.